Напомним читателю, что мы продолжаем работать в 2 ГШВ!

Уравнение Смолуховского мы так и не решили – оно сложное, интегральное и нелинейное. Более того, решений у него очень много и практически все не имеют физического смысла.

Но доказывается, что если наложить дополнительные условия:

$$A_1(x)! = 0, A_2(x)! = 0, A_k(x) = 0, \text{если } k \geq 3$$

где

$$A_k(x) = \lim_{\Delta t \to 0} < \frac{(x^I - x)^k}{\Delta t} > = (\text{немного аккуратней распишем, а то непонятно}) =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^I - x)^k}{\Delta t} * \rho\,(x \to x^I \text{ за } \Delta t\,) dx^I$$

условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x \to x^I \text{ за } \Delta t) dx^I = 1$$

и ГУ:

$$\lim_{x \to -\infty} \rho(x,t) = \lim_{x \to -\infty} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = \lim_{x \to +\infty} \rho(x,t) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0$$

(условия на производную исключат потоки)

то сложное, нелинейное, интегральное уравнение Смолуховского сведётся к простому, дифференциальному уравнению в частных производных – уравнению Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\theta}{\gamma} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right)$$

Или, в трёхмерном случае:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\theta}{\gamma} \Delta \rho + \frac{1}{\gamma} div(\rho(x) gradU(x))$$

Да, в них ещё добавилось внешнее потенциальное поле $U(x)$. Если его нет, то просто кладём соответствующее слагаемое равным нулю.

Анриан Фоккер – индонезийский учёный, перебравшийся в метрополию – Нидерланды:

8. Дать физическую интерпретацию уравнения Фоккера–Планка в трехмерном пространстве и дополнительных условий к нему.

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\theta}{\gamma}\Delta\rho + \frac{1}{\gamma}div(\rho(x)gradU(x))$$

ВОПРОС: Почему уравнение Фоккера-Планка на функцию двух переменных: $\rho(x,t)$, а Смолуховского – на 4: $\rho(x_0, t_0 \to x, t)$?
ОТВЕТ: на самом деле в Фоккере-Планке тоже функция 4 переменных: $\rho(x_0, t_0 \to x, t)$. Просто первые два - x_0, t_0 - традиоционно полагают нулём и не пишут.

Записали уравнение – а теперь погнали его решать для различных частных случаев

Задача 35.
Найти решение одномерного уравнения Фоккера-Планка на полубесконечной прямой $x > 0$, считая, что внешнего силового поля нет, и что в точке $x = 0$ стоит непроницаемая стенка.

Запишем уравнение Фоккера-Планка в предположении равенства нулю внешней силы (т.е. U(x)=0):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}, D = \frac{\theta}{\gamma} - \text{ коэф диффузии}$$

Не узнаёте? Да это уравнение теплопроводности. А ежели так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Лезем на антресоли, где среди коньков и лыж лежат наши конспекты по ММФ. Стряхнув пыль, мы находим решение задачи на теплопроводности на луче:

$$\rho(x,t) = \int_0^{+\infty} G_1(x,z,t)\varphi(z)dz$$

Где $G_1(x,z,t)$ - функция Грина уравнения теплопроводности на луче

$$G_1(x,z,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4Dt}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x+z)^2}{4Dt}}$$

а $\varphi(y)$ - начальные условия, начальное распределение плотности вероятности $\rho(x,0)$. В случае, если изначально частица находилась в точке x_0, то это дельта-функция б$(x - x_0)$. Тогда решение запишется очень просто:

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}} \right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \left(e^{-\frac{x^2+x_0^2}{2Dt}} \right)$$

Замечание по оформлению – по фен-шую нужно на момент постановки задачи ещё написать граничные и начальные условия:

$$\text{НУ: } \rho(x,0) = \varphi(x)$$

$$\text{ГУ слева: } \left.\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$

$$\text{ГУ справа: } \lim_{x\to\infty} \rho(x,t) = \lim_{x\to\infty} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial x} = 0$$

Задача 36.

Найти решение одномерного уравнения Фоккера-Планка в поле сил тяжести $U = mgx$ на бесконечной прямой для брауновской частицы, которая в момент времени $t = 0$ находилась в точке $x = x_0$, определить средние значения $\overline{x}$ и $\overline{(\Delta x)^2}$. Полагая, что положение отсчитывается от реально существующего дна сосуда, сформулировать ограничения на временной интервал t, в течение которого полученное решение имеет физический смысл.

Запишем уравнение Фоккера-Планка во внешнем потенциальном поле U(x)=mgx:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho(x)\frac{\partial mgx}{\partial x}\right) = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{mg}{\gamma}\frac{\partial \rho(x)}{\partial x}$$

Капитулировать? Мы же русские люди и сделали из стали! Надо свести задачу к предыдущей, а для этого вспомнить Боголюбова, который на лекциях по ММФ советовал делать в этом случае замену. Сделаем её и мы: $\rho(t,x) = \rho\big(t, y(x,t)\big)$

Тогда:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_y + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_t \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_x$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_t = \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_t \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t$$

И давайте вручную положим $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t = 1$ (т.е. $y(x,t) = x + T(t)$)

Тогда и вторые производные совпададут: $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\right)_t = \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2}\right)_t$

Давайте это всё подставлять в:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{mg}{\gamma}\frac{\partial \rho(x)}{\partial x}$$

Получим:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_y + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_t \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_x = D\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)_t + \frac{mg}{\gamma}\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)_t$$

И видим, что чтобы нам стало хорошо, нам надо положить $\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_x = \frac{mg}{\gamma}$. Вкупе с $y(x,t) = x + T(t)$ это даст однозначно $y(x,t) = x + \frac{mgt}{\gamma}$

Ну а мы же получаем задачу теплопроводности на прямой

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_y = D\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}\right)_t$$

Решение которой известно из ММФ:

$$\rho(y,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(y,z,t)\varphi(z)dz$$

Где $G(x,z,t)$ - функция Грина уравнения теплопроводности на прямой:

$$G(y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{(y-z)^2}{4Dt}}$$

$$\rho(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-z)^2}{4Dt}}\varphi(z)dz$$

Тоже давайте предположим, что изначально частица была в одной точке, поэтому $\varphi(z) = б(z - y_0)$, поэтому

$$\rho(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{(y-y_0)^2}{4Dt}}$$

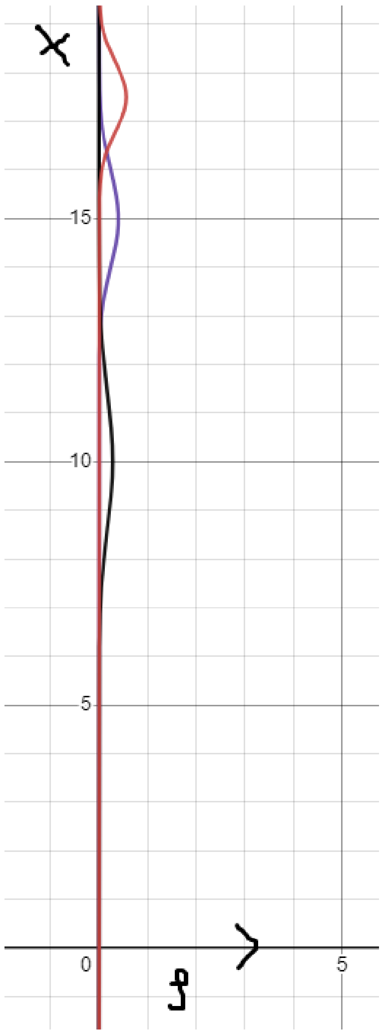
Осталось здесь обратную замену:

$$y = x + \frac{mgt}{\gamma}$$

поэтому

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{\left(x+\frac{mgt}{\gamma}-x_0\right)^2}{4Dt}}$$

Можете поиграться в Десмосе https://www.desmos.com/calculator/cn1hifpbfd (я переобозначил там x и y, чтобы при движении график двигался вниз). Видно, что чем ниже и дальше от точки старта, тем график расплывчатей:



https://www.desmos.com/calculator/oo3ppre0ba

Теперь же представим (что от нас требуют в условии), что у нас не бесконечное падение, а сосуд конечный длины. Вообще по-честному задачу нужно перерешивать, но от нас требуют в этом случае грубую оценку времени падения. Средняя скорость падения из

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{\left(x+\frac{mgt}{\gamma}-x_0\right)^2}{4Dt}}$$

есть $\frac{mg}{\gamma}$, поэтому время падения – высота сосуда / $\frac{mg}{\gamma}$.